解析力学の山門

yts

令和 5 年 3 月 10 日

目 次

第 1 章　前書き **1**

第 2 章　Euler-Lagrange の方程式 **2**

2.1　仮想仕事の原理と d'Alembert の原理からの旅立ち 2

2.1.1　第 1 項目の変形 3

2.1.2　第 2 項目の変形 4

2.2　Euler-Lagrange の方程式 7

第 3 章　作用積分と Euler-Lagrange の方程式 **9**

3.1　作用積分について 9

3.2　最小作用の原理と Euler-Lagrange の方程式 10

第 4 章　Appendix **13**

4.1　支点が動く振り子 13

第1章　前書き

解析力学を理解すべく、「悟り」を求めて山門をくぐってみたのは良いのだが、すぐに壁に突き当たる。それは、「一般化座標と一般化速度は独立なのかどうか」という疑問に答えを見いだせないという壁である。この疑問については、ネット上でいろいろ議論されてているくらいであるから、答えるのは難しいものなのであろう [1, 2, 3]。「どの意見が正しくて、どの意見が間違っているのかも分からない」という状況から脱したく、自分なりに少し考えてみた。御批判頂ければ幸いである。

第 2 章　Euler-Lagrange の方程式

2.1　仮想仕事の原理と d'Alembert の原理からの旅立ち

N 個の質点からなる系を考える。座標系としては 3 次元直交座標系をとる。σ 番目（$\sigma = 1 \cdots N$）の質点の質量を m_σ、位置座標を $(x_\sigma, y_\sigma, z_\sigma)$、そしてそれに働く力を $(F_{\sigma x}, F_{\sigma y}, F_{\sigma z})$ とする。

座標成分を並べて書くと

$$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \cdots, x_N, y_N, z_N$$

となる。これに対応して、質量を

$$m_1, m_1, m_1, m_2, m_2, m_2, \cdots, m_N, m_N, m_N$$

また、力の座標成分を

$$F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}, F_{2x}, F_{2y}, F_{2z}, \cdots, F_{Nx}, F_{Ny}, F_{Nz}$$

と並べる。以後、これらに通し番号を付けて

$$\begin{aligned} &x_1, x_2, x_3, \cdots, x_i, \cdots, x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N} \\ &m_1, m_2, m_3, \cdots, m_i, \cdots, m_{3N-2}, m_{3N-1}, m_{3N} \\ &F_1, F_2, F_3, \cdots, F_i, \cdots, F_{3N-2}, F_{3N-1}, F_{3N} \end{aligned} \tag{1}$$

のように書くことにする（$i = 1 \cdots 3N$）。

仮想仕事の原理[1] に d'Alembert の原理[2] を適用すると[3]、

$$\sum_i (F_i - m_i \ddot{x}_i)\, \delta x_i = 0 \qquad i = 1 \cdots 3N \tag{2}$$

なる式が得られる。この式で、第 1 項目の $\sum_i F_i \delta x_i$ は、物体を δx_i だけ仮想変位させたときに力 F_i がする仮想仕事 δW と考えられる。この仕事（エネルギー）は何処に行くかといえば、運動エネルギーの増分 δT とな

[1]質点に働く合力 $\boldsymbol{F}^{(re)}$ がゼロのとき、その質点を十分小さい $\delta \boldsymbol{x}$ だけ仮想変位させても、その合力のする仕事 $\boldsymbol{F}^{(re)} \cdot \delta \boldsymbol{x}$ はゼロである。

[2]Newton の運動方程式 $\boldsymbol{F} = m\ddot{\boldsymbol{x}}$ を変形して $\boldsymbol{F} - m\ddot{\boldsymbol{x}} = 0$ と書く。質点に働く合力 $\boldsymbol{F}^{(re)} \equiv \boldsymbol{F} - m\ddot{\boldsymbol{x}}$ がゼロとなっていると、すなわち $\boldsymbol{F}$ と $-m\ddot{\boldsymbol{x}}$ がつり合っているとみなすことができる。

[3]注釈 2 の $\boldsymbol{F}^{(re)}$ を注釈 1 の $\boldsymbol{F}^{(re)}$ に代入すると、$(\boldsymbol{F} - m\ddot{\boldsymbol{x}}) \cdot \delta \boldsymbol{x} = 0$ を得る。

るはずである。したがって、上式の第 2 項目の $\sum_i m_i \ddot{x}_i \delta x_i$ を運動エネルギー $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2$ を用いた表現に変えてみたくなる。T はスカラー量なので、取り扱いが容易になるのではという期待もある[4]。すなわち

$$\sum_i m_i \ddot{x}_i \delta x_i = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right)\delta x_i \tag{3}$$

と変形する。この式を（2）式に代入すると、

$$\sum_i \left\{F_i - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right)\right\}\delta x_i = 0 \tag{4}$$

となり、各々の仮想変位 δx_i は任意であることから、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) = F_i \tag{5}$$

を得る。この式は単に Newton の運動方程式そのものを与えるだけのものなので、Newton の運動方程式以上の意味は持たない。

いま、独立な束縛条件が r 個あった場合、自由度 f は r 個だけ少なくなるので、$f = 3N - r$ となる。物体の位置座標を、直交座標系の (x, y, z)、円筒座標系の (r, θ, h)、球面極座標系の (r, θ, ϕ) などに限らず、次式のように f 個の変数 q_k (一般化座標）で表すことにする。

$$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3, \cdots, q_k, \cdots, q_f, t) \tag{6}$$

この一般化座標を導入することにより（5）式を一般化できれば、それは役に立つのではないかという期待が湧く。なお、今後、$q_1, q_2, q_3, \cdots, q_k, \cdots, q_f$ の組を省略して $\boldsymbol{q}$ と書くこともある。

2.1.1 第 1 項目の変形

（6）式より

$$\delta x_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial x_i}{\partial t}\delta t = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k \qquad k = 1 \cdots f \tag{7}$$

[4] T の変数を明記すると

$$T = T(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \cdots, \dot{x}_i, \cdots, \dot{x}_{3N-2}, \dot{x}_{3N-1}, \dot{x}_{3N})$$

である。

となる。2 番目の等式では $\delta t = 0$ としている。仮想変位は座標の変化のみで、時間の変化は考えていないからである。この式を用いると、(2) 式の第 1 項目は

$$\sum_i F_i \delta x_i = \sum_{i,k} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_k Q_k \delta q_k \tag{8}$$

と書ける。上式の最後の等式には、

$$Q_k \equiv \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \tag{9}$$

と定義した**一般力**を導入した。

2.1.2 第 2 項目の変形

(2) 式の第 2 項目を運動エネルギー T を含むよう式変形して行くのが目標である。その第一歩として、(2) 式の第 2 項目を (3) 式のように時間微分を含む形にすると、

$$\begin{aligned}\sum_i m_i \ddot{x}_i \delta x_i &= \sum_{i,k} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k \\ &= \sum_k \left\{ \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) - \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) \right\} \delta q_k \end{aligned} \tag{10}$$

となる。この式において、もし、$\frac{\partial x_i}{\partial q_k}$ を同じ次元を持つ $\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k}$、そして、$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)$ を同じ次元を持つ $\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}$ で表すことができたら、この (10) 式から (5) 式と同じように運動エネルギー T を用いた式が得られるかも知れない。ところが、3 つの疑問がすぐ思い浮かぶ。

疑問 1：
$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k}$ や $\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}$ のように、$\dot{x}$ を q_k や $\dot{q}_k$ で偏微分したものを考えるというが、そもそも $\dot{x}$ が q_k や $\dot{q}_k$ の関数で書けるのか。

疑問 2：
$\dot{x}$ を q_k や $\dot{q}_k$ で偏微分するというが、q_k と $\dot{q}_k$ は独立変数なのか。後者は前者の時間微分なので物理的に独立でないはずだが...。

疑問 3：

独立変数として q_k と $\dot{q}_k$ 以外は必要ないのか。例えば、$\ddot{q}_k$ は必要ないのか。

まずは**疑問 3** から。独立変数を q_k と $\dot{q}_k$ だけとして計算して行く中で、これら以外の変数を導入する必要がある時には理論を見直せばよい。以下、そのような変数は出てこないので、独立変数として q_k と $\dot{q}_k$ 以外は必要ないということでこの疑問は解決した。

次に**疑問 1** である。x_i は $\boldsymbol{q}$ と時間 t の関数なので

$$\dot{x}_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \tag{11}$$

となる。この式で、$\frac{\partial x_i}{\partial q_k}$ と $\frac{\partial x_i}{\partial t}$ は一般化座標と時間の関数なので、$\dot{x}_i$ は、q_k、$\dot{q}_k$、t の関数として書けることが分かる。$\dot{x}_i$ の変数を明記すれば

$$\dot{x}_i = \dot{x}_i(q_1, q_2, q_3, \cdots, q_k, \cdots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \cdots, \dot{q}_k, \cdots, \dot{q}_f, t) \tag{12}$$

と書けることになる。これで疑問 1 は解決に至った。ついでに、運動エネルギー T の変数を明記すると、$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2$ であるから、

$$T = T(q_1, q_2, q_3, \cdots, q_k, \cdots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \cdots, \dot{q}_k, \cdots, \dot{q}_f, t) \tag{13}$$

となる。

なお、今後、$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \cdots, \dot{q}_k, \cdots, \dot{q}_f$ の組を省略して $\dot{\boldsymbol{q}}$ と書くこともある。

最後に**疑問 2** である。目標は（2）式の第 2 項目を運動エネルギー T を含むよう式変形することであった。その第一歩として（10）式を得た。引き続き式変形を行って行く。T を含む形に式変形するためには、$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k}$ や $\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}$ のように、$\dot{x}$ を q_k や $\dot{q}_k$ で偏微分したものを導入する必要がある。そして、**偏微分が定義されるためには、q_k と $\dot{q}_k$ は独立変数でなければならない**。つまり、変数の一方が固定した値を持つときに、他方が自由にその値を取れなければ偏微分が定義できない。

「$\dot{\boldsymbol{q}}$ が $\boldsymbol{q}$ の時間微分であるから、両者は独立ではない。」という意見について、筆者は次のように理解している。$\dot{\boldsymbol{q}}$ は $\boldsymbol{q}$ の時間微分であるということは、$\boldsymbol{q}(t)$ と $\dot{\boldsymbol{q}}(t)$ の間に関数関係があるということを言っているだ

けで、両者の独立性とは別の話である。$\boldsymbol{q}(t)$ と $\dot{\boldsymbol{q}}(t)$ を結びつける関係式の中に、初期条件（あるいは境界条件）の不確定性から由来する少なくとも１つの不確定定数が含まれる。不確定定数の値を変えれば、$\boldsymbol{q}$ の値を固定しても、$\dot{\boldsymbol{q}}$ の値はどの様にでもとれる。その逆、不確定定数の値を変えれば、$\dot{\boldsymbol{q}}$ の値を固定しても、$\boldsymbol{q}$ の値はどの様にでもとれる。これが $\boldsymbol{q}$ と $\dot{\boldsymbol{q}}$ が独立であるという意味である。もちろん、不確定定数を固定すれば（運動の初期条件や境界条件を決めれば)、$\boldsymbol{q}$ と $\dot{\boldsymbol{q}}$ は独立ではなくなる。このとき、$\boldsymbol{q}$ と $\dot{\boldsymbol{q}}$ を独立変数として作られる $\boldsymbol{q}$ - $\dot{\boldsymbol{q}}$ 空間の中に、質点系が実際にたどる運動軌跡（曲線）を描くことができる。この運動軌跡上では、ある任意の時刻 t_0 での $\boldsymbol{q}(t_0)$ を与えると $\dot{\boldsymbol{q}}(t_0)$ が一義的に決まる。確かに、運動軌跡上では $\boldsymbol{q}$ と $\dot{\boldsymbol{q}}$ は独立ではない[5] [6]。

初期条件（あるいは境界条件）が確定していない場合、一般化座標 $\boldsymbol{q}$ と一般化速度 $\dot{\boldsymbol{q}}$ を独立変数として扱える。

「初期条件（あるいは境界条件）が確定していない場合」と言う代わりに、「運動軌跡が確定していない場合」と言っても良い。筆者の以上の理解が正しいならば、疑問 2 も解決したことになる。

さて、この節における以下の記述では、初期条件（あるいは境界条件）が確定していない場合を考えているので、$\boldsymbol{q}$ と $\dot{\boldsymbol{q}}$ は独立変数として扱うことができる。そして、両者による偏微分も定義できる。(11) 式から

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \tag{14}$$

[5]単振り子を例にとる。運動方程式がない状況なので観測を行うことにする。観測の結果、振れ角が $\theta(t) = A\sin\omega t$、振れ角方向の速度の成分が $\dot{\theta}(t) = A\omega\cos\omega t$ であることが分かったとする。ここで、A は振幅、ω は振り子の長さと重力加速度で決まる定数である。このとき、$\dot{\theta}(t)$ は、確かに $\theta(t)$ の時間微分である。いま、$\theta(t)$ と $\dot{\theta}(t)$ から t を消去すると、$\left(\frac{\theta}{A}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\theta}}{A\omega}\right)^2 = 1$ となる。この式で、θ の値を決めても、A が不確定なので、A の値を変えれば、$\dot{\theta}$ の値はどの様にでもとれる。また逆に $\dot{\theta}$ の値を決めても、A が不確定なので、A の値を変えれば、θ の値はどの様にでもとれる。これが、θ と $\dot{\theta}$ が独立であるという意味である。もちろん、初期条件（あるいは境界条件）を与えて A の値を確定すれば、θ と $\dot{\theta}$ は独立ではなくなる。このとき、θ と $\dot{\theta}$ を独立変数として作られる空間に楕円軌跡（運動軌跡）を描くことができる。

[6]一般に $\boldsymbol{q}$ の値を決めても $\dot{\boldsymbol{q}}$ が一義的に決まるとは言えない。$\boldsymbol{q}$ の値を決めても、$\dot{\boldsymbol{q}}$ が異なる複数の値を持つ場合がある。例えば、単振り子の場合、振り子が行ったり来たりするので、θ の値を決めても $\dot{\theta}$ が異なる 2 つの値をとる。そこで、ここでは、ある任意の時刻 t_0 での $\boldsymbol{q}$ と $\dot{\boldsymbol{q}}$ の値と限定した。

が得られる。また、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) &= \sum_l \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_l}\frac{dq_l}{dt} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial q_k} \qquad l = 1 \cdots f \\
&= \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\sum_l \frac{\partial x_i}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial x_i}{\partial t}\right) \\
&= \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} \qquad (15)
\end{aligned}
$$

である。なお、最後の等式には（11）式を用いた。これで、$\frac{\partial x_i}{\partial q_k}$ を同じ次元を持つ $\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k}$、そして、$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)$ を同じ次元を持つ $\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}$ で表すことができることが分かった。そこで、（10）式を運動エネルギー $T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{x}_i^2$ が入った形にすると、

$$
\begin{aligned}
\sum_i m_i \ddot{x}_i \delta x_i &= \sum_k \left\{\frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k}\right) - \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}\right\}\delta q_k \\
&= \sum_k \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k}\right\}\delta q_k \qquad (16)
\end{aligned}
$$

となる。以上で、本節の目標が達成された。

2.2 Euler-Lagrange の方程式

（8）式と（16）式を（2）式に代入すると

$$
\sum_k \left[Q_k - \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k}\right\}\right]\delta q_k = 0 \qquad (17)
$$

を得る。ここで、（2）式を使用したので Newton の運動方程式が入ったことになる。上式で各々の δq_k は任意なので、

$$
\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k} \qquad (18)
$$

を得る。この式を **Euler-Lagrange の方程式**と呼ぶ。この方程式の導出過程から分かるように、Euler-Lagrange の方程式の中の $\boldsymbol{q}$ と $\dot{\boldsymbol{q}}$ は互いに独立な変数である。そして、適当な初期条件（あるいは境界条件）のも

とで、この方程式を解けば、質点系が実際に描く運動軌跡を $\boldsymbol{q}$ と $\dot{\boldsymbol{q}}$ で作る空間の中に描くことができる。この運動軌跡上では、ある任意の時刻 t_0 での $\boldsymbol{q}(t_0)$ を与えると $\dot{\boldsymbol{q}}(t_0)$ が一義的に決まる。したがって、その軌跡上では $\boldsymbol{q}$ と $\dot{\boldsymbol{q}}$ は互いに独立ではない。

さて、力が保存力で、ポテンシャルエネルギー $U(q_1, q_2, q_3, \cdots, q_i)$ が定義できる場合を考える。一般力 Q_k は

$$Q_k \equiv \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = -\sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial U}{\partial q_k} \tag{19}$$

と書ける。(19) 式 に (19) 式を代入して、$L \equiv T - U$ で定義された**ラグランジアン**L を用いると

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0} \tag{20}$$

なる式が得られる。なお、L の変数を明記すれば

$$L = L(q_1, q_2, q_3, \cdots, q_k, \cdots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \cdots, \dot{q}_k, \cdots, \dot{q}_f, t) \tag{21}$$

となる。あるいは、略記して $L = L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ と書く。

第3章　作用積分とEuler-Lagrangeの方程式

3.1　作用積分について

作用積分 S を

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\ dt$$

で定義すると、多くの方々が書かれている。しかし、**この式だけを見ていると**誤解を招く。変分に関しては後で詳しく書くので、そちらを参照して貰うこととして、S の変分を考え、それをゼロとおく。

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right)\ dt = 0$$

ラグランジアン L の変数である q_k と $\dot{q}_k$ を独立とすると、δq_k と $\delta \dot{q}_k$ は独立なので、$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$、$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0$ となる。「たとえば、L は定数？」などといった意味のない結果を得る。だから、「$\boldsymbol{q}$ と $\dot{\boldsymbol{q}}$ を独立とするのはおかしい。」と誤解してしまう。この誤解は、時間で積分していることを、そして、**作用積分は時間 t をパラメタとする運動軌跡上での積分なのだ**ということを忘れていることから生じている。このことを忘れないように、以下の式のように（軌跡）と付記して作用積分 S を定義する。

$$S = \int_{t_1\ \text{(軌跡)}}^{t_2} L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\ dt \tag{22}$$

ここで、**被積分項**である L の変数 $\boldsymbol{q}$ と $\dot{\boldsymbol{q}}$ は独立変数である。一方、運動軌跡上では、ある任意の時刻 t_0 での $\boldsymbol{q}(t_0)$ を与えると $\dot{\boldsymbol{q}}(t_0)$ が一義的に決まる[7]。したがって、作用積分 S の定義式の中の「運動軌跡上での積分」を実行する過程では、$\boldsymbol{q}$ と $\dot{\boldsymbol{q}}$ は独立ではなくなる。

[7] 2.1.2 節を参照のこと。

3.2 最小作用の原理と Euler-Lagrange の方程式

いま、時刻 t_1 における $q_k(t_1)$ の値と、時刻 t_2（$\neq t_1$）における $q_k(t_2)$ の値は分っている（確定している）とする（$k = 1 \cdots f$）。このことを、(q_k, t) 時空間の中で表現すると、右図のように、$q_k(t_1)$ と $q_k(t_2)$ は固定点であるとして表現できる。

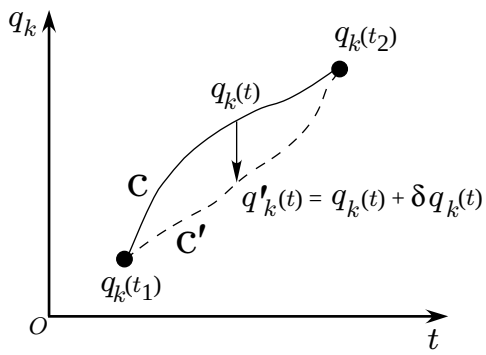

図 1: 作用積分

この 2 点を通る、いろいろな運動軌跡を考えたときに、実際の運動がとる軌跡は、S が停留値をとるものである。これを**最小作用の原理**と呼ぶ。

まず、これら 2 点を通る運動軌跡 $q_k(t)$ を適当にとる（図中の実線曲線 C）。その軌跡で求めた作用積分の値を S とする。次に、時刻 t_1 と t_2 では $q_k(t)$ と同じだけれども、その他の時刻では $q_k(t)$ とは無限小 $\delta q_k(t)$（変分）だけ異なった運動軌跡 $q'_k(t) = q_k(t) + \delta q_k(t)$ を考える（図中の曲線 C′）。この軌跡で求めた作用積分の値を S' とする。作用積分が停留値をとるのは、$\delta S \equiv S' - S = 0$ のときである。

運動軌跡上では、一般化座標 q_k と一般化速度 $\dot{q}_k$ は独立でないので、一般化座標の変分 $\delta q_k(t)$ に伴い、一般化速度も変化する。$\delta q_k(t)$ に伴い、$\dot{q}_k(t)$ から $\dot{q}'_k(t) = \dot{q}_k(t) + \delta\dot{q}_k$ へと変化したとする。一方、運動軌跡を表す式である $q'_k(t) = q_k(t) + \delta q_k(t)$ の辺々を時間で微分すると、$\dot{q}'_k(t) = \dot{q}_k(t) + \frac{d}{dt}\delta q_k(t)$ となる。すなわち

$$\delta\dot{q}_k(t) = \frac{d}{dt}\delta q_k(t) \qquad \text{（ただし、運動軌跡上のみ）} \tag{23}$$

を得る。さて、δS を計算て行く。まず、

$$\begin{aligned}\delta S = \int_{t_1\ (\text{軌跡})}^{t_2} \delta L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\ dt &= \int_{t_1\ (\text{軌跡})}^{t_2} \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta\dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t \right)\ dt \\ &= \int_{t_1\ (\text{軌跡})}^{t_2} \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta\dot{q}_k \right)\ dt \end{aligned} \tag{24}$$

のように式を変形する。この式の最後の等式では $\delta t = 0$ としている。$q_k(t)$ から $q'_k(t)$ へ変化させるとき t は変化させていない、つまり、変分は座標の変分のみで、時間の変分は考えていないからである。なお、同式における被積分項の式の変形では、一般化座標 $\boldsymbol{q}$ と一般化速度 $\dot{\boldsymbol{q}}$ を独立変数としている[8]。運動軌跡上である（$\boldsymbol{q}$ と $\dot{\boldsymbol{q}}$ は独立ではない）という条件は使っていない。

δS をさらに変形して行く。以下の式の 2 番目の等号では運動軌跡上でしか成り立たない式である（23）式を用いている。運動軌跡上なので $\boldsymbol{q}$ と $\dot{\boldsymbol{q}}$ は独立ではない。その一方、$\frac{\partial L}{\partial q_k}$ と $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ の箇所では、$\boldsymbol{q}$ と $\dot{\boldsymbol{q}}$ は独立変数のままとしている。**被積分項**の中であれば、$\boldsymbol{q}$ と $\dot{\boldsymbol{q}}$ が独立な箇所があっても、独立でない箇所があっても問題はない。というのは、どうせ積分は運動軌跡上で行うので、最終的には $\boldsymbol{q}$ と $\dot{\boldsymbol{q}}$ は独立でなくなるからである。

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1\ (\text{軌跡})}^{t_2} \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right)\ dt \\
&= \int_{t_1\ (\text{軌跡})}^{t_2} \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} \delta q_k \right)\ dt \\
&= \int_{t_1\ (\text{軌跡})}^{t_2} \sum_k \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right\} \delta q_k\ dt + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \Bigg|_{t_1}^{t_2} \\
&= \int_{t_1\ (\text{軌跡})}^{t_2} \sum_k \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right\} \delta q_k\ dt \qquad (25)
\end{aligned}
$$

上式の 3 番目の等式では部分積分を行っており、4 番目の等式では $q_k(t_1)$ と $q_k(t_2)$ が固定されている、つまり変分 $\delta q_k(t_1)$ と $\delta q_k(t_2)$ がゼロであることを用いている。ここで、$\delta S = 0$ とおいて、δq_k が任意であることを考慮すると、

$$
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)}{\partial q_k} = 0 \qquad (26)
$$

を得る。最小作用の原理は、この微分方程式を満たす運動軌跡が 2 つの固定点：$q_k(t_1)$、$q_k(t_2)$ を通る実際の運動軌跡であることを主張する。

（26）式が微分方程式だということが興味深い。そこでは、運動軌跡

[8] 両者独立でなければ偏微分は定義できない。

が 2 つの固定点を通るという条件がなくなっている[9]。つまり、2 つの固定点の選び方には任意性がある。2 階の微分方程式には、不確定定数が 2 つ存在することに対応している。この任意性のため運動軌跡が確定しない。すなわち、(26) 式は実際の運動軌跡を与えるけれども、実際の運動軌跡は $q_k(t_1)$ と $q_k(t_2)$ の値が与えられているという条件下で (26) 式を解くまで分からないということである。(26) 式が与えられた段階では運動軌跡は確定していなので、$\boldsymbol{q}$ と $\dot{\boldsymbol{q}}$ は独立変数として扱える。このことは、(25) 式から (26) 式を抽出する際に $\boldsymbol{q}$ と $\dot{\boldsymbol{q}}$ を独立変数のままとしていることに正当性を与える。

ここで、$\boldsymbol{q}$ と $\dot{\boldsymbol{q}}$ を独立変数として、これら両変数で作られる $\boldsymbol{q}$ - $\dot{\boldsymbol{q}}$ 空間を考える。2 つの固定点の選び方には任意性があるということは、これら 2 点を $\boldsymbol{q}$ - $\dot{\boldsymbol{q}}$ 空間の中にどこにでも置けるということになる。その結果、問題に応じて、$\boldsymbol{q}$ - $\dot{\boldsymbol{q}}$ 空間のどこにでも実際の運動軌跡を描くことができることになる。もともと、ただ 1 つの運動軌跡上でしか考えていなかった (26) 式を $\boldsymbol{q}$ - $\dot{\boldsymbol{q}}$ 空間全体で成り立つものとして拡張することができる。これで、最小作用の原理から Euler-Lagrange の方程式が導かれたことになる。

[9] この条件が何故消えたのかについては自信を持って答えられない。おそらく、$q_k(t_1)$ と $q_k(t_2)$ を固定して、2 つの運動軌跡 (C と C') で、それぞれ計算した作用積分の**差**を求めたからだと考えている。具体的には、$\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$ としたことで消えたのであろう。この等式が成り立たないとすると、(26) 式は出てこないからである。

第4章　Appendix

4.1　支点が動く振り子

（6）式や（21）式を見ると、x_i や L が時間 t に陽に依存している場合も考慮されている。束縛が時間に依存している「支点が動く振り子」は、そのような場合の例である。

右図のように、振り子の支点が $a(t)$ のようにしか動けないよう束縛されている振り子を考える。振り子の長さは一定で ℓ、質点（重り）の質量は m とする。また、重力加速度を g とする。

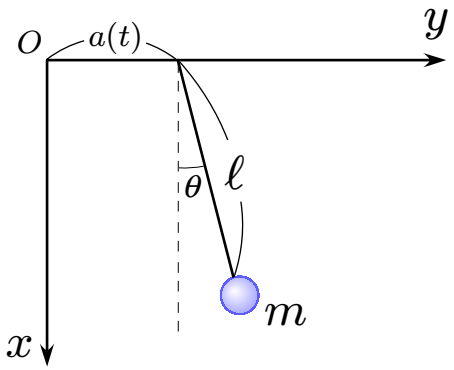

図 2: 支点が動く振り子

いま、同図のように直交座標系をとったときの質点の位置座標を (x, y) とする。ここで、x、y を ℓ、振り子の傾き角 θ（ラジアン角）で表すと

$$x = \ell\cos\theta,\ y = \ell\sin\theta + a(t) \tag{27}$$

と書ける。ℓ は一定という束縛条件があるので、質点の自由度は1となる。そこで、一般化座標として θ を選ぶ。x は一般化座標 θ だけの関数であるが、y は一般化座標 θ ばかりではなく、陽に時間 t の関数となっている。

次にラグランジアンを求める。そのため、直交座標系での速度 $(\dot{x}, \dot{y})$ を一般化座標 θ と一般化速度 $\dot{\theta}$ で表わすと、

$$\dot{x} = -\ell\dot{\theta}\sin\theta,\ \dot{y} = \ell\dot{\theta}\cos\theta + \dot{a}(t) \tag{28}$$

となる。したがって、運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\,\dot{\theta}^{\,2} + m\ell\dot{a}(t)\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}m\{\dot{a}(t)\}^2 \tag{29}$$

と書ける。一方、ポテンシャルエネルギーは

$$U = -mg\ell\cos\theta \tag{30}$$

なので、ラグランジアンとして

$$L = \frac{1}{2}m\ell^2\,\dot{\theta}^{\,2} + m\ell\dot{a}(t)\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}m\{\dot{a}(t)\}^2 + mg\ell\cos\theta \tag{31}$$

を得る。これは一般化座標 θ、一般化速度 $\dot{\theta}$ ばかりではなく、陽に時間 t の関数となっている。

ついでなので、この例において、一般化座標 $\boldsymbol{q}$ と一般化速度 $\dot{\boldsymbol{q}}$ を独立変数とした（14）式と（15）式が成立していることを確かめておく。

（14）式：

$$\frac{\partial\dot{x}}{\partial\dot{\theta}} = -\ell\sin\theta,\ \frac{\partial x}{\partial\theta} = -\ell\sin\theta \qquad \Rightarrow \frac{\partial\dot{x}}{\partial\dot{\theta}} = \frac{\partial x}{\partial\theta} \tag{32}$$

$$\frac{\partial\dot{y}}{\partial\dot{\theta}} = \ell\cos\theta,\ \frac{\partial y}{\partial\theta} = \ell\cos\theta \qquad \Rightarrow \frac{\partial\dot{y}}{\partial\dot{\theta}} = \frac{\partial y}{\partial\theta} \tag{33}$$

（15）式：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right) = -\ell\dot{\theta}\cos\theta,\ \frac{\partial\dot{x}}{\partial\theta} = -\ell\dot{\theta}\cos\theta \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right) = \frac{\partial\dot{x}}{\partial\theta} \tag{34}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right) = -\ell\dot{\theta}\sin\theta,\ \frac{\partial\dot{y}}{\partial\theta} = -\ell\dot{\theta}\sin\theta \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right) = \frac{\partial\dot{y}}{\partial\theta} \tag{35}$$

参考文献

[1] 物理のかぎしっぽ 「ラグランジュの運動方程式」
http://hooktail.maxwell.jp/bbslog/9534.html

[2] 物理のかぎしっぽ 「最小作用の原理」
http://hooktail.maxwell.jp/bbslog/10179.html

[3] 武内　修 「ラグランジアンやハミルトニアンで変数を独立とすることについて」
https://dora.bk.tsukuba.ac.jp/~takeuchi/?解析力学/ラグランジアン#wd533a4a